6.2. Príklady

Príklad 6.2.1. Impedančnú funkciu $Z(p)=\dfrac{p^4+3p^2+1}{p^5+4p^3+3p}$ LC dvojpólu realizujte v 1. Fosterovom kánonickom tvare.

Riešenie: Uvedenú funkciu rozložíme na parciálne zlomky:
$Z(p)=\dfrac{k_0}{p}+pk_\infty+\sum_i \dfrac{2k_{2i}p}{p^2+\omega_{2i}^2}$, kde $i=2,4,6,\ldots$ a $k_0, k_\infty, 2k_{2i}$ sú rezíduá impedančnej funkcie v príslušných póloch. Skôr, ako ich vypočítame, pomocou substitúcie zistíme nulové body a póly impedančnej funkcie:

$$p^2=s$$

$$s_{x1,x2}=\frac{-3\pm\sqrt{9-4}}{2}=\left\langle \begin{array}{l} \dfrac{-3+\sqrt{5}}{2}=-0{,}382 \\[2ex] \dfrac{-3-\sqrt{5}}{2}=-2{,}618 \end{array}\right.$$

$$s_{p1,p2}=\frac{-4\pm\sqrt{16-12}}{2}=\left\langle \begin{array}{l} \dfrac{-4+2}{2}=-1 \\[2ex] \dfrac{-4-2}{2}=-3 \end{array}\right.$$

Z uvedeného výpočtu je jasné, že nulové body a póly ležia na imaginárnej osi, sú komplexne združené, jednoduché a navzájom sa striedajú. Ich hodnoty je možné určiť nasledovne:

$$\begin{array}{ll} x_1=j\sqrt{0{,}382}=0{,}618j & p_1=j \\ x_2=-j\sqrt{0{,}382}=-0{,}618j & p_2=-j \\ x_3=j\sqrt{2{,}618}=1{,}618j & p_3=j\sqrt{3}=1{,}732j \\ x_4=-j\sqrt{2{,}618}=-1{,}618j & p_4=-j\sqrt{3}=-1{,}732j \end{array}$$

V ďalšom kroku vypočítame reziduá príslušnej funkcie:

$$k_0=\left[Z(p)\cdot p\right]_{p=0}=\left[\frac{p^4+3p^2+1}{p^4+4p^2+3}\right]_{p=0}=\frac{1}{3}$$

$$k_\infty = \lim_{p\to\infty}\frac{Z(p)}{p} = \lim_{p\to\infty}\frac{p^4+3p^2+1}{p^6+4p^4+3p^2} = 0$$

$$2k_1 = \left[\frac{Z(p)}{p}\left(p^2+\omega_1^2\right)\right]_{p^2=-\omega_1^2} = \left[\frac{\left(p^2+0{,}382\right)\left(p^2+2{,}618\right)}{p^2\left(p^2+1\right)\left(p^2+3\right)}\left(p^2+1\right)\right]_{p^2=-1} =$$

$$= \left[\frac{\left(p^2+0{,}382\right)\left(p^2+2{,}618\right)}{p^2\left(p^2+3\right)}\right]_{p^2=-1} = \left[\frac{(-1+0{,}382)(-1+2{,}618)}{(-1)(-1+3)}\right] = 0{,}5$$

$$2k_2 = \left[\frac{Z(p)}{p}\left(p^2+\omega_2^2\right)\right]_{p^2=-\omega_2^2} = \left[\frac{\left(p^2+0{,}382\right)\left(p^2+2{,}618\right)}{p^2\left(p^2+1\right)\left(p^2+3\right)}\left(p^2+1\right)\right]_{p^2=-3} =$$

$$\left[\frac{\left(p^2+0{,}382\right)\left(p^2+2{,}618\right)}{p^2\left(p^2+1\right)}\right]_{p^2=-3} = \left[\frac{(-3+0{,}382)(-3+2{,}618)}{(-3)(-3+1)}\right] = 0{,}167$$

Na záver vypočítame hodnoty prvkov 1. Fosterovho kánonického dvojpólu:

$$C_0 = \frac{1}{k_0} = \frac{1}{\frac{1}{3}} = 3F$$

$$L_\infty = k_\infty = 0$$

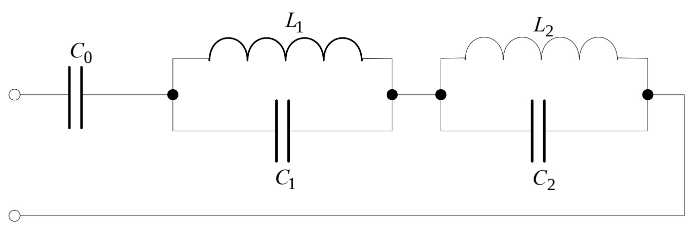
$$C_1 = \frac{1}{2k_1} = 2F$$

$$L_1 = \frac{2k_1}{\omega_1^2} = 0{,}5H$$

$$C_2 = \frac{1}{2k_2} = 5{,}99F$$

$$L_2 = \frac{2k_2}{\omega_2^2} = 0{,}057H$$

Výsledné zapojenie 1.Fosterovho kánonického dvojpólu je na obrázku:



Príklad 6.2.2. Impedančnú funkciu $Z(p)=\dfrac{p^3+4p}{5p^4+35p^2+50}$ realizujte v 1.Fosterovom kánonickom tvare.

Riešenie: Uvedenú funkciu rozložíme na parciálne zlomky:
$Z(p)=\dfrac{k_0}{p}+pk_\infty+\sum_i \dfrac{2k_{2i}p}{p^2+\omega_{2i}^2}$, kde $i=2,4,6,\ldots$ a $k_0, k_\infty, 2k_{2i}$ sú rezíduá impedančnej funkcie v príslušných póloch. Polynómy v čitateli a menovateli impedančnej funkcie napíšeme v tvare súčinu koreňových súčiniteľov:

$$Z(p)=\frac{p\left(p^2+4\right)}{5\left(p^2+2\right)\left(p^2+5\right)}$$

Z uvedeného vzťahu je vidieť, že nulové body a póly $Z(p)$ ležia na imaginárnej osi, sú komplexne združené a jednoduché, z čoho plynie, že sa jedná o impedančnú funkciu pasívneho LC dvojpólu.

$$Z(p)=\frac{k_0}{p}+pk_\infty+\sum_{i=1}^{n}\frac{2k_i p}{p^2+\omega_{2i}^2}=\frac{k_0}{p}+pk_\infty+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{p\dfrac{1}{2k_i}+\dfrac{1}{p\dfrac{2k_i}{\omega_{2i}^2}}}=$$

$$=\frac{1}{p\dfrac{1}{k_0}}+pk_\infty+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{p\dfrac{1}{2k_i}+\dfrac{1}{p\dfrac{2k_i}{\omega_{2i}^2}}}=\frac{1}{pC_0}+pL_\infty+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{pC_i+\dfrac{1}{pL_i}},$$

kde n je počet dvojíc komplexne združených pólov impedančnej funkcie.

$$k_0=\left[Z(p)p\right]_{p=0}=\left[\frac{p\left(p^2+4\right)}{5\left(p^2+2\right)\left(p^2+5\right)}p\right]_{p=0}=0$$

$$k_\infty=\lim_{p\to\infty}\frac{Z(p)}{p}=\lim_{p\to\infty}\frac{p\left(p^2+4\right)}{5\left(p^2+2\right)\left(p^2+5\right)}\cdot\frac{1}{p}=\lim_{p\to\infty}\frac{p^2+4}{5p^4+35p^2+50}=0$$

$$2k_1 = \left[\frac{Z(p)}{p}\left(p^2 + \omega_1^2\right)\right]_{p^2=-\omega_1^2} = \left[\frac{p\left(p^2+4\right)}{5\left(p^2+2\right)\left(p^2+5\right)}\cdot\frac{\left(p^2+2\right)}{p}\right]_{p^2=-2} =$$

$$= \left[\frac{p^2+4}{5\left(p^2+5\right)}\right]_{p^2=-2} = \frac{2}{15}$$

$$2k_2 = \left[\frac{Z(p)}{p}\left(p^2 + \omega_2^2\right)\right]_{p^2=-\omega_2^2} = \left[\frac{p\left(p^2+4\right)}{5\left(p^2+2\right)\left(p^2+5\right)}\cdot\frac{\left(p^2+5\right)}{p}\right]_{p^2=-5} =$$

$$= \left[\frac{p^2+4}{5\left(p^2+2\right)}\right]_{p^2=-5} = \frac{1}{15}$$

Hodnoty prvkov 1.Fosterovej kánonickej realizácie sú:

$$C_0 = \frac{1}{k_0} \to \infty \Rightarrow Z_C(p) = \frac{1}{pC_0} \to 0$$

$$L_\infty = k_\infty = 0$$

$$C_1 = \frac{1}{2k_1} = \frac{15}{2}F$$

$$L_1 = \frac{2k_1}{\omega_1^2} = \frac{1}{15}H$$

$$C_2 = \frac{1}{2k_2} = 15F$$

$$L_2 = \frac{2k_2}{\omega_2^2} = \frac{1}{75}H$$

Výsledné zapojenie 1.Fosterovho kánonického dvojpólu je na obrázku: